เอกสารในห้องเรียน

บทที่ 4 Kinetics of Systems of Particles

(จลนศาสตร์ของระบบอนุภาค)

กล่าวนำ

ในบทนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่แบบ Kinetics ของระบบอนุภาค ที่ได้นำเอา***สมการการเคลื่อนที่หรือกฎข้อที่ 2 -ของนิวตัน สมการความสัมพันธ์ของงานและพลังงาน สมการความสัมพันธ์ของอิมพัลส์และโมเมนตัม*** มาประยุกต์ใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

เอกสารนี้เป็นเอกสารประกอบใช้ระหว่างเรียนในห้อง ที่สรุปเนื้อหา สมการวิเคราะห์ และโจทย์ปัญหาตัวอย่างต่างๆ ในตำราอ้างอิง [1] (แบบปกปิดวิธีการวิเคราะห์บางส่วน) ทั้งนี้เพื่อให้นักศึกษามีเอกสารในระหว่างเรียน และสามารถจดบันทึกไปพร้อมกับการบรรยายในห้องเรียนได้อย่างสะดวก

4.1 สมการการเคลื่อนที่ (Generalized Newton's Second Law)

พิจารณาระบบอนุภาคในรูปที่ 4.1 ที่ประกอบด้วยอนุภาค n อนุภาค ที่อยู่ร่วมกันภายใต้พื้นผิวปิดรอมใดๆ (System boundary) จากรูป อนุภาค $\boldsymbol{m_i}$ ใดๆ ถูกกระทำด้วยแรง $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ และ $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \ldots$ โดยที่

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ คือ *"แรงกระทำภายนอก" (external force)* เนื่องจาก แรงคงที่ภายนอก แรงโน้มถ่วง แรงจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

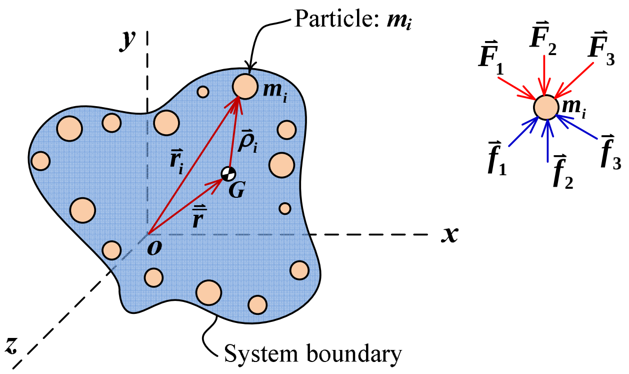
$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \ldots$ คือ *"แรงกระทำภายใน" (internal force)* เนื่องจาก แรงปฏิกิริยาจากอนุภาคข้างเคียง (แรงดึงดูดของอนุภาคข้างเคียง) ที่กระทำต่อมวล $\boldsymbol{m_i}$

สมการกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สำหรับมวล $\boldsymbol{m_i}$

$$\Sigma\vec{F} = m_i\vec{a}_i$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \ldots = m_i\ddot{\vec{r}}_i$$

สำหรับอนุภาคมวลอื่นๆ สมการเคลื่อนที่ (กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน) ก็สามารถกระทำได้เช่นเดียวกัน



รูปที่ 4.1

เมื่อนำสมการการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาคมารวมกัน จะได้สมการเคลื่อนที่ทั้งระบบเป็น

$$\Sigma\vec{F} + \Sigma\vec{f} = \Sigma m_i\ddot{\vec{r}}_i$$

พจน์ $\Sigma\vec{f}$ เป็นแรงปฏิกิริยาภายในที่แต่ละอนุภาคกระทำต่อกัน ที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นผลรวมของแรงภายในทั้งระบบจะเป็นศูนย์ ซึ่งสมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคจะเหลือเพียง

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma m_i\ddot{\vec{r}}_i \qquad (4.1)$$

จากรูป ระบบอนุภาคมีตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล (G) ที่ห่างจากจุด O คือ $\bar{\vec{r}}$ และมีสมการความสัมพันธ์ของตำแหน่งศูนย์กลางมวล เป็น

$$m_t \bar{\vec{r}} = \Sigma m_i \vec{r}_i \qquad (4.2)$$

โดยที่ $m_t = \Sigma m_i$ เป็นมวลรวมของระบบอนุภาค ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองเทียบต่อเวลาสมการ (4.2) คือ

$$m_t \ddot{\bar{\vec{r}}} = \Sigma m_i \ddot{\vec{r}}_i \qquad (4.3)$$

จะพบว่าสมการที่ (4.1) เท่ากับสมการที่ (4.3) ที่มีความสัมพันธ์คือ

$$\Sigma \vec{F} = m_t \ddot{\bar{\vec{r}}} \quad \text{หรือ} \quad \Sigma \vec{F} = m_t \bar{\vec{a}} \qquad (4.5)$$

ความหมายของสมการ (4.5) คือ ***“ผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบอนุภาค <u>จะเท่ากับ</u> ผลคูณของมวลรวม ($m_t = \Sigma m_i$) กับความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล ($\bar{\vec{a}}$)”***

สมการที่ (4.5) สามารถแยกเป็น สมการในแนวแกนของระบบพิกัดฉาก x-y-z ได้เป็น

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m_t \bar{a}_x \\ \Sigma F_y &= m_t \bar{a}_y \\ \Sigma F_z &= m_t \bar{a}_z \end{aligned} \qquad (4.5a)$$

<u>ข้อควรระวัง:</u> *สมการการเคลื่อนที่ (4.5) เป็นสมการ vector (จะต้องจัดการแบบเวกเตอร์)*

4.2 วิธีการงานและพลังงาน (Work and Energy)

พิจารณาการเคลื่อนที่ในรูปที่ 4.1

สมการงานและพลังงาน สำหรับอนุภาคมวล m_i

$$(U_{1-2})_i = \Delta T_i \quad \text{หรือ} \quad (T_1)_i + (U_{1-2})_i = (T_2)_i$$

โดยที่

$(T_1)_i$ และ $(T_1)_i$ คือพลังงานจลน์ของอนุภาค m_i ณ ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$(U_{1-2})_i$ คืองานเนื่องจากแรงกระทำภายนอก $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ และแรงกระทำภายในของแรงปฏิกิริยาจากอนุภาคข้างเคียง $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \ldots$

สำหรับอนุภาคมวลอื่นๆ สมการความสัมพันธ์งานและพลังงาน ก็สามารถกระทำได้เช่นเดียวกัน

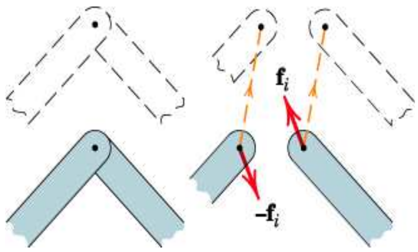
เมื่อนำสมการความสัมพันธ์งานและพลังงานของแต่ละอนุภาคมารวมกัน จะได้ทั้งระบบเป็น

$$\begin{aligned} &\Sigma (U_{1-2})_i = \Sigma \Delta T_i \\ &U_{S,1-2} = \Delta T_S \quad \text{หรือ} \quad T_{S,1} + U_{S,1-2} = T_{S,2} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

เมื่อ: $U_{S,1-2} = \Sigma (U_{1-2})_i$ และ ΔT_S คือการเปลี่ยนพลังงานจลน์รวมทั้งระบบ $T_S = \Sigma T_i$

สำหรับวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body) หรือระบบวัตถุแข็งเกร็ง (System of rigid bodies) ณ จุดจับยึด (joined) จะมีแรงสุทธิเนื่องจากแรงจับยึด $\vec{f}_i$ และ $-\vec{f}_i$ ซึ่งเป็นแรงคู่ปฏิกิริยากัน ดังรูป 4.2 งานสุทธิเนื่องจากแรงดังกล่าวนี้จะเป็นศูนย์ เป็นเพราะ ณ จุดจับยึดนี้จะมีการกระจัดเดียวกัน ดังนั้นงานจะหักล้างกันไป

งานสุทธิ ณ จุดจับยึดของวัตถุแข็งเกร็ง: $\Sigma U_{f_i} = 0$



รูปที่ 4.2

สำหรับระบบกลไกยืดหยุ่น (Nonrigid mechanical system) จะประกอบด้วยชิ้นส่วนยืดหยุ่น เช่น สปริง ที่มีการสะสมพลังงานศักย์ยืดหยุ่น คือ V_e ดังนั้น จากสมการที่ (4.6) สามารถเขียนวิเคราะห์สำหรับระบบกลไกยืดหยุ่น ได้เป็น

$$U'_{S,1-2} = \Delta T_S + \Delta V_S \qquad (4.7)$$

หรือ

$$T_{S,1} + V_{S,1} + U'_{S,1-2} = T_{S,2} + V_{S,2} \qquad (4.7a)$$

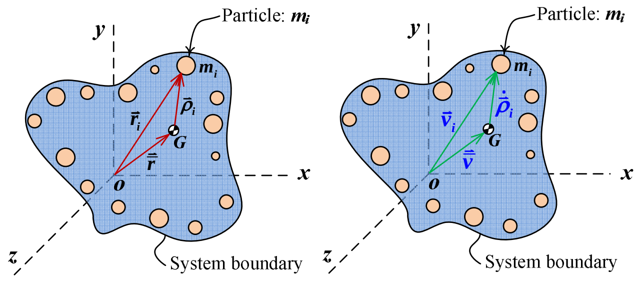
โดยที่

$U'_{S,1-2} =$ งานจากแรงภายนอก ยกเว้น แรงโน้มถ่วงและแรงจากสิ้นส่วนยืดหยุ่น เช่น สปริง

T_S = พลังงานจลน์รวมของระบบ $T_S = \Sigma T_i$

V_S = พลังงานศักย์รวมของระบบ $V_S = V_{S,g} + V_{S,e}$

พลังงานจลน์ของระบบอนุภาค: T_S



(a) Relative displacement **(b) Relative velocity**

รูปที่ 4.3

นิยาม พลังงานจลน์ของระบบอนุภาค คือ

$$T_S = \Sigma T_i = \Sigma \frac{1}{2} m_i\, v_i^2$$

$$T_S = \Sigma \frac{1}{2} m_i\, \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

จากความสัมพันธ์ของความเร็วสัมพัทธ์ ในรูปที่ 4.3 จะพบว่า

$$\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

เมื่อ $\vec{\bar{v}}$ คือความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล ***G*** ของระบบอนุภาค และ $\dot{\vec{\rho}}_i$ คือความเร็วสัมพัทธ์ของอนุภาค m_i เทียบต่อความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล ***G*** ดังนั้น หากใช้ $\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i$ แทนในสมการพลังงานจลน์ของระบบอนุภาคจะได้

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i\, \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$= \Sigma \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i \right) \cdot \left(\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i \right)$$

$$= \Sigma \frac{1}{2} m_i\, \bar{v}^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\vec{\rho}}_i \right|^2 + \Sigma m_i\, \vec{\bar{v}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i$$

แต่เนื่องจาก $\vec{\rho}_i$ วัดจากจุดศูนย์กลางมวล ***G*** ซึ่ง $\Sigma m_i \vec{\rho}_i = 0$ พจน์ $\Sigma m_i \vec{\bar{v}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\bar{v}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\Sigma m_i \vec{\rho}_i \right) = 0$ และพจน์ $\Sigma \frac{1}{2} m_i\, \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \left(\Sigma m_i \right) = \frac{1}{2} m_t\, \bar{v}^2$ สุดท้ายจะได้ พลังงานจลน์รวมของระบบ เป็น

$$\boxed{T_S = \frac{1}{2} m_t\, \bar{v}^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\vec{\rho}}_i \right|^2} \qquad (4.8)$$

ความหมายของสมการ (4.8) คือ ***"พลังงานจลน์รวมของระบบอนุภาค <u>เท่ากับ</u> พลังงานจลน์ของจุดศูนย์กลางมวล <u>บวก</u> พลังงานจลน์จากความเร็วสัมพัทธ์ของแต่ละอนุภาค $\left(\dot{\vec{\rho}}_i \right)$ เทียบต่อความเร็วจุดศูนย์กลางของระบบมวล $\left(\vec{\bar{v}} \right)$ "***

4.3 วิธีการอิมพัลส์และโมเมนตัม (Impulse and Momentum)

4.3a โมเมนตัมเชิงเส้น (Linear Momentum)

จากรูปที่ 4.3 โมเมนตัมเชิงเส้นของแต่ละอนุภาค คือ $\vec{G}_i = m_i \vec{v}_i$ เมื่อ m_i , $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ คือมวล และความเร็วของแต่ละอนุภาค ตามลำดับ ดังนั้น โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบอนุภาค คือ

$$\vec{G}_S = \Sigma \vec{G}_i = \Sigma m_i \vec{v}_i$$

แทน $\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i$ จะได้

$$\vec{G}_S = \Sigma m_i \left(\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i \right)$$

$$\vec{G}_S = \vec{\bar{v}}\, \Sigma m_i + \Sigma m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$\vec{G}_S = \vec{\bar{v}}\, \Sigma m_i + \frac{d}{dt}\left(\Sigma m_i \vec{\rho}_i \right) = m_t\, \vec{\bar{v}} + \frac{d}{dt}(0)$$

$$\vec{G}_S = \vec{\bar{v}}\, \Sigma m_i$$

$$\boxed{\vec{G}_S = m_t\, \vec{\bar{v}}} \qquad (4.9)$$

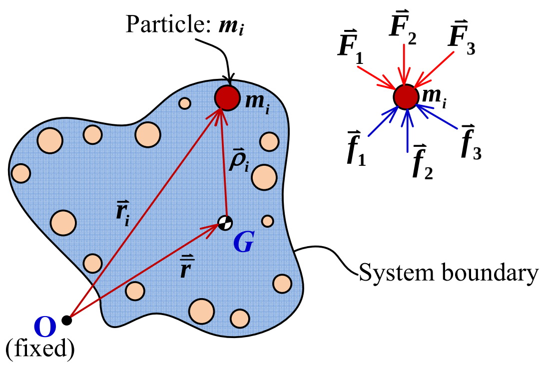
สมการที่ (4.9) คือ ***"โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบอนุภาค เท่ากับ ผลคูณของมวลรวมกับความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล"*** อนุพันธ์เทียบต่อเวลาของสมการ (4.9) จะได้ $\dot{\vec{G}}_S = m_t\, \dot{\vec{\bar{v}}} = m_t\, \vec{\bar{a}} = \Sigma \vec{F}$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของแรงลัพธ์ภายนอกที่กระทำต่อระบบอนุภาค กับอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค คือ

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = \dot{\vec{G}}_S} \qquad (4.10)$$

4.3b โมเมนตัมเชิงมุม (Angular Momentum)

พิจารณาระบบอนุภาคในรูปที่ 4.4 โดยมีจุดศูนย์กลางมวลที่จุด G และมีจุดสังเกตแบบคงที่ (fixed-observer) ที่จุด *O* สำหรับการวิเคราะห์โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด *O และ G* สามารถกระทำได้ ดังนี้



รูปที่ 4.4

1) โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดสังเกตคงที่ : O

โมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค m_i ใดๆ รอบจุด O คือ $\vec{H}_{o,i} = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$ เมื่อ $\vec{r}_i$ คือเวกเตอร์การกระจัดของอนุภาค m_i เมื่อวัดจากจุด O และ $m_i\vec{v}_i$ คือโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค m_i ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบอนุภาครอบจุด O คือ

$$\vec{H}_{O,S} = \Sigma\vec{H}_{O,i} = \Sigma\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_{O,S}\right):\quad \dot{\vec{H}}_{O,S} &= \Sigma\left(\dot{\vec{r}}_i \times m_i\vec{v}_i\right) + \Sigma\left(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{v}}_i\right)\\ &= \Sigma\left(\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i\right) + \Sigma\left(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{v}}_i\right)\\ &= \Sigma(0) + \Sigma\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i\right)\\ &= \Sigma\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)\end{aligned}$$

ซึ่ง $\vec{M}_{O,i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ ดังนั้น จะความสัมพันธ์ของโมเมนต์รอบจุด o ที่เกิดจากแรงภายนอก $\vec{F}_i$ กับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมรวมทั้งระบบอนุภาค คือ

$$\Sigma\left(\vec{M}_{o,i}\right) = \dot{\vec{H}}_{O,S} \tag{4.11}$$

2) โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล : G

โมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค m_i ใดๆ รอบจุด G คือ $\vec{H}_{o,i} = \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i$ เมื่อ $\vec{\rho}_i$ คือเวกเตอร์การกระจัดของอนุภาค m_i เมื่อวัดจากจุด G และ $m_i\vec{v}_i$ คือโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค m_i ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบอนุภาครอบจุด G คือ

$$\vec{H}_{G,S} = \Sigma\vec{H}_{G,i} = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i\right) = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\ \dot{\vec{r}}_i\right) \tag{4.12}$$

แทน $\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i$ จะได้

$$\begin{aligned}\vec{H}_{G,S} &= \Sigma\left[\vec{\rho}_i \times m_i\left(\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i\right)\right]\\ &= \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\vec{\bar{v}}\right) + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\dot{\vec{\rho}}_i\right)\\ &= -\vec{\bar{v}} \times \Sigma\left(m_i\vec{\rho}_i\right) + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\dot{\vec{\rho}}_i\right)\\ &= -\vec{\bar{v}} \times 0 + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\dot{\vec{\rho}}_i\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้

$$\vec{H}_{G,S} = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\dot{\vec{\rho}}_i\right) \tag{4.12a}$$

สมการที่ (4.12) เรียกว่า ***"โมเมนตัมเชิงมุมรวมสัมบูรณ์ (absolute angular momentum)"*** *เพราะความเร็ว $\vec{v}_i$ หรือ $\dot{\vec{r}}$ เป็นความเร็วสัมบูรณ์ ส่วนสมการ*ที่ (4.12a) เรียกว่า ***"โมเมนตัมเชิงมุมรวมสัมพัทธ์ (relative angular momentum)"*** *เพราะความเร็ว $\dot{\vec{\rho}}_i$ เป็นความเร็วสัมพัทธ์ ซึ่งจะพบว่าโมเมนตัมเชิงมุมรวมสัมบูรณ์และสัมพัทธ์รอบจุดศูนย์กลางมวล G* ***จะมีเท่ากับ*** อนุพันธ์เทียบต่อเวลาของสมการ (4.12) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_{G,S}\right):\quad \dot{\vec{H}}_{G,S} &= \frac{d}{dt}\Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\ \dot{\vec{r}}_i\right)\\ &= \Sigma\left(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i\,\dot{\vec{r}}_i\right) + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\right)\end{aligned}$$

แทน $\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{\bar{r}}} + \dot{\vec{\rho}}_i$ จะได้

$$\dot{\vec{H}}_{G,s} = \Sigma\left[\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i\left(\dot{\bar{\vec{r}}} + \dot{\vec{\rho}}_i\right)\right] + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\right)$$
$$= \left\{\Sigma\left(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i\,\dot{\bar{\vec{r}}}\right) + \Sigma\left(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i\,\dot{\vec{\rho}}_i\right)\right\} + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\right)$$
$$= \left\{-\dot{\bar{\vec{r}}}\left[\frac{d}{dt}\Sigma\left(m_i\vec{\rho}_i\right)\right] + \Sigma(0)\right\} + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\right)$$
$$= \left\{-\dot{\bar{\vec{r}}}\left[\frac{d}{dt}(0)\right] + \Sigma(0)\right\} + \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\right)$$

ดังนั้น จะได้

$$\dot{\vec{H}}_{G,s} = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\right) = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\vec{a}_i\right) = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i\right) \qquad (4.13)$$

ซึ่ง $\vec{M}_{G,i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ ดังนั้น จะความสัมพันธ์ของโมเมนต์รอบจุด G ที่เกิดจากแรงภายนอก $\vec{F}_i$ กับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมรวมทั้งระบบอนุภาค คือ

$$\Sigma\left(\vec{M}_{G,i}\right) = \dot{\vec{H}}_{G,s} \qquad (4.14)$$

4.4 สมการอนุรักษ์พลังาน และอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Energy and Momentum)

4.4a) สมการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of Energy)

หากไม่มีงานจากแรงไม่อนุรักษ์ เช่น งานจากแรงนอก งานจากแรงเสียดทาน (ยกเว้น งานจากพลังศักย์โน้มถ่วง V_g และพลังงานศักย์ยืดหยุ่น V_e) นั่นคือ $U'_{S,1-2} = 0$ จากสมการที่ (4.7) จะได้

$$\Delta T_S + \Delta V_S = 0 \qquad (4.15)$$

หรือ

$$T_{S,1} + V_{S,1} = T_{S,2} + V_{S,2} \qquad (4.15a)$$

โดยที่ $T_S = \frac{1}{2} m_t \bar{\vec{v}}^{\,2} + \Sigma \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{\rho}}_i\right|^2$

$V_S = V_{S,g} + V_{S,e}$

สมการที่ (4.15) ***"กฎการอนุรักษ์พลังงานกล"***

(พลังงานกล = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์)

4.4b) สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum)

หากแรงลัพธ์ภายนอกที่กระทำกับระบบอนุภาคเป็นไม่ศูนย์ $\Sigma\vec{F} = 0$ สมการที่ (4.10) จะได้

$$\Sigma\vec{F} = \dot{\vec{G}}_S = 0$$

$$\vec{G}_{S,1} = \vec{G}_{S,2} \qquad (4.16)$$

โดยที่ $\vec{G}_S = m_t\,\bar{\vec{v}}$

สมการที่ (4.16) ***"กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น"***

และเช่นเดียวกัน หากโมเมนต์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบอนุภาครอบจุด O หรือจุดศูนย์กลางมวล G เป็นศูนย์ จากสมการที่ (4.11) และ (4.14) จะได้เป็น

$$\Sigma\left(\vec{M}_{O,i}\right) = \dot{\vec{H}}_{O,s} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \Sigma\left(\vec{M}_{G,i}\right) = \dot{\vec{H}}_{G,s}$$

$$\vec{H}_{O,s1} = \vec{H}_{O,s2} \quad \text{หรือ} \quad \vec{H}_{G,s1} = \vec{H}_{G,s2} \qquad (4.17)$$

โดยที่ $\vec{H}_{O,s} = \Sigma\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right)$

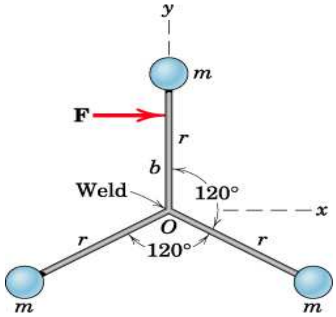
$\vec{H}_{G,s} = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i\right) = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\,\dot{\vec{r}}_i\right)$

สมการที่ (4.17) ***"กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม"***

<u>ส่วนที่ 1 ตัวอย่าง Kinetics of Systems of Particles</u>

Sample Problem 4/1

Each of the three balls has a mass m and is welded to the rigid equiangular frame of negligible mass. The assembly rests on a smooth horizontal surface. If a force **F** is suddenly applied to one bar as shown, determine (*a*) the acceleration of point O and (*b*) the angular acceleration $\ddot{\theta}$ of the frame.



<u>วิธีทำ</u>

a) ความเร่งของจุด O: นั่นคือความเร่งของจุด ศก. มวล ของระบบอนุภาค : $\bar{\vec{a}}_o$

จาก *Equation of motion* ของระบบอนุภาค (สมการ 4.6)

$$\Sigma\vec{F} = m_t\,\bar{\vec{a}} \quad \Rightarrow F\,\vec{i} = (3m)\bar{\vec{a}}_o \;\therefore\; \bar{\vec{a}}_o = \left(\frac{F}{3m}\right)\vec{i} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

b) ความเร่งเชิงมุมรอบจุด O : $\ddot{\theta}$

จากสมการที่ (4.14) : *"ผลรวมของโมเมนต์จากแรงภายนอกรอบจุด G (จุด O ใน ตย. นี้) จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด G"* นั้นคือ

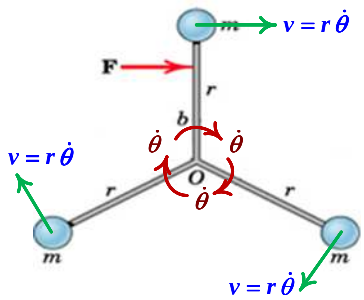
$$\Sigma\left(\vec{M}_{G,i}\right) = \dot{\vec{H}}_{G,S} \Rightarrow \Sigma\left(\vec{M}_{O,i}\right) = \dot{\vec{H}}_{O,S}$$

$$\Sigma\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \frac{d}{dt}\Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i\right)$$

$$-(bF)\vec{k} = \frac{d}{dt}\Sigma\left[-rm\left(r\dot{\theta}\right)\right]\vec{k}$$

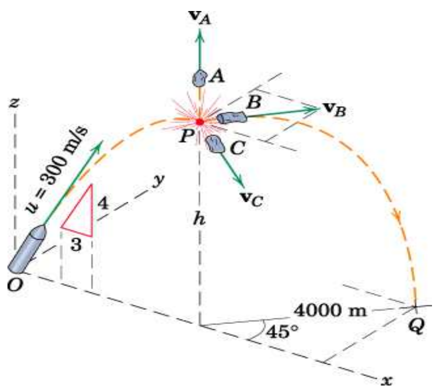
$$Fb = 3mr^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{Fb}{3mr^2}\ (CW) \quad \underline{\underline{Ans}}$$



Sample Problem 4/3

A shell with a mass of 20 kg is fired from point O, with a velocity u = 300 m/s in the vertical x-z plane at the inclination shown. When it reaches the top of its trajectory at P, it explodes into three fragments A, B, and C. Immediately after the explosion, fragment A is observed to rise vertically a distance of 500 m above P, and fragment B is seen to have a horizontal velocity $\mathbf{v}_B$ and eventually lands at point Q. When recovered, the masses of the fragments A, B, and C are found to be 5, 9, and 6 kg, respectively. Calculate the velocity which fragment C has immediately after the explosion. Neglect atmospheric resistance.



<u>วิธีทำ</u>

โจทย์ถามหาความเร็วของชิ้นส่วน C: V_C ซึ่งเป็นความเร็วหลังการระเบิด ดังนั้นสมการวิเคราะห์จะต้องใช้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นของการระเบิด ณ จุด P นั้นคือ

โมเมนตัมของระบบก่อนชน = โมเมนตัมของระบบหลังชน: $\vec{G}_{S,1} = \vec{G}_{S,2}$

$M\vec{v}_P = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C \quad \rightarrow (1)$ แต่มีตัวแปรไม่ทราบค่าเพิ่มมา 3 ตัวแปร ได้แก่ $\vec{v}_P, \vec{v}_A, \vec{v}_B$

1) หา $\vec{v}_P$ ณ จุด P (จุดสูงสุด โพรเจกไทล์) นั้นคือ

$\vec{v}_{P,z} = 0$ # และ $\vec{v}_{P,x} = u\left(\frac{3}{5}\right) = 300\frac{3}{5}\,\vec{i}\ \ m/s$ #

2) หา $\vec{v}_A$ ณ จุด P หลังการระเบิด เคลื่อนที่ในแนวดิ่งสูงสุด 500 m. ใช้สมการอนุรักษ์พลังงาน นั้นคือ

$$\frac{1}{2}m_A\vec{v}_{A,1}^2 + \cancel{m_A g h_1} = \cancel{\frac{1}{2}m_A\vec{v}_{A,2}^2} + m_A g h_2$$

$$\frac{1}{2}m_A\vec{v}_{A,1}^2 = m_A g h_2 \Rightarrow \vec{v}_{A,1} = \sqrt{2gh_2}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A,1} = \sqrt{2(9.81)500}\ \ \therefore \vec{v}_A = (99.045)\vec{k}\ \ m/s\ \#$$

3) หา $\vec{v}_B$ ณ จุด P หลังการระเบิดเคลื่อนที่ออกในแนวระนาบ $\left(\vec{v}_{B,z} = 0\right)$ เคลื่อนที่ตกที่จุด Q ทำมุม 45° ระยะตกในแนวระนาบ 4,00 m. ความสูง ณ h ดังรูป

สมการเคลื่อนที่แนวระนาบ: $\vec{v}_B = const. = \frac{S_{h,PQ}}{t_{PQ}} = \frac{4,000\,m}{t_{PQ}} \rightarrow (2)$

หา t_{PQ} จากการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง z (ทราบระยะ $S_{v,PQ} = h$):

$$-S_{v,PQ} = \cancel{u_{v,1}t_{BQ}} - \frac{1}{2}g\,t^2_{BQ} \Rightarrow t_{BQ} = \sqrt{\frac{2}{g}S_{v,PQ}} = \sqrt{\frac{2}{g}h}$$ แต่ไม่ทราบ h ซึ่งสามารถหาได้จาก การ

เคลื่อนที่จากจุด O – P นั้นคือ $\cancel{u^2_{v,P}} = u^2_{v,P} - 2gh \Rightarrow h = \frac{u^2_{v,P}}{2g} = \frac{\left[300(4/5)\right]^2}{2(9.81)}\ \ \therefore\ h = 2935.78\,m$

ดังนั้นจะได้ $t_{BQ} = \sqrt{\frac{2}{g}h} = \sqrt{\frac{2}{9.81}(2935.78)}\ \ \therefore t_{BQ} = 24.465\ s$ แทนค่าใน (2) จะได้

$$\vec{v}_B = \frac{4,000\,m}{t_{PQ}} = \frac{4,000\,m}{24.465\ s}\ \ \therefore \vec{v}_B = 163.5\ m/s\ \angle 45^o : x\ \#$$

สรุปค่าที่ทราบคือ

$$\vec{v}_P\begin{cases}\vec{v}_{P,z} = 0\ \# \\ \vec{v}_{P,x} = u\left(\frac{3}{5}\right) = 300\frac{3}{5}\,\vec{i}\ \ m/s\ \#\end{cases}$$

$\vec{v}_A = 99.045\,\vec{k}\ \ m/s$ #

$\vec{v}_B = 163.5\ m/s\ \angle 45^o : x$ #

แทนค่าใน (1) หา $\vec{v}_C$ จะได้

จาก (1): $M\vec{v}_P = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C$ แทนค่าที่ทราบ

$$M\vec{v}_P = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C$$

$$20\left(300\frac{3}{5}\,\vec{i}\right) = 5(99.045\,\vec{z}) + 9\left(163.5\cos 45^o\,\vec{i} + 163.5\sin 45^o\,\vec{j}\right) + 6(\vec{v}_C)$$

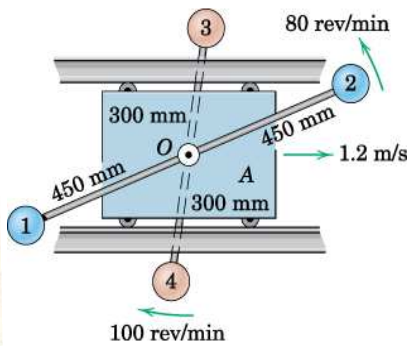
$$\Rightarrow 6\vec{v}_C = \left\{20\left(300\frac{3}{5}\right) - 9(163.5\cos 45^o)\right\}\vec{i} + \left\{-9\left(163.5\sin 45^o\right)\right\} - \left\{5(99.045)\right\}\vec{k}$$

$$\therefore\ \vec{v}_C = \left(426.58\vec{i} - 173.42\vec{j} - 82.54\vec{k}\right)\ m/s$$

$$|\vec{v}_C| = \sqrt{426.58^2 - 173.42^2 - 82.54^2} = 467.8\ m/s\ \ \underline{\underline{Ans}}$$

Sample Problem 4/4

The 16-kg carriage *A* moves horizontally in its guide with a speed of 1.2 m/s and carries two assemblies of balls and light rods which rotate about a shaft at *O* in the carriage. Each of the four balls has a mass of 1.6 kg. The assembly on the front face rotates counterclockwise at a speed of 80 rev/min, and the assembly on the back side rotates clockwise at a speed of 100 rev/min. For the entire system, calculate (*a*) the kinetic energy *T*, (*b*) the magnitude *G* of the linear momentum, and (*c*) the magnitude H_O of the angular momentum about point *O*.



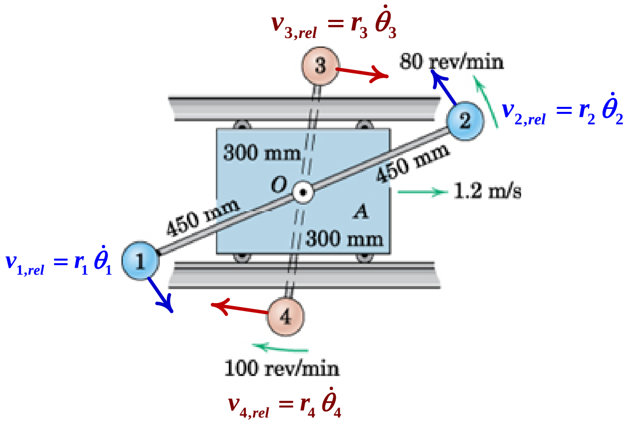
วิธีทำ

โจทย์ถามหา a) พลังงานจลน์รวมของระบบ:T_S b) โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบ:$\vec{G}_S$ c) โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบรอบจุด O :$\vec{H}_{O,S}$

a) พลังงานจลน์รวมของระบบ:T_S

จากสมการ (4.8): $T_S = \frac{1}{2} m_t \bar{\vec{v}}^{\,2} + \Sigma \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{\rho}}_i\right|^2 \rightarrow (1)$

ซึ่ง $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_{rel}$ คือความเร็วสัมพัทธ์ของแต่ละอนุภาคเทียบต่อความเร็ว จุด ศก. มวลของระบบอนุภาค (จุด O): ดังนั้น *"หากเราเคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด ศก. มวล O จะเห็นความเร็วสัมพัทธ์ของแต่ระอนุภาคเป็นความเร็วในแนวสัมพัทธ์ของการเคลื่อนที่แบบหมุน นั้นคือ* $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_{rel} = (r\Omega)_i = (r\dot{\theta})_i = \left(r\frac{2\pi n}{60}\right)_i$ ดังรูปด้านล่าง"



ความเร็วสัมพัทธ์ ของแต่ละอนุภาค

$$\vec{v}_{1,rel} = \vec{v}_{2,rel} = r_1\frac{2\pi n_1}{60} = 0.45\frac{2\pi(80)}{60}$$
$$\Rightarrow \vec{v}_{1,rel} = \vec{v}_{2,rel} = 3.77\ m/s\ \#$$

$$\vec{v}_{3,rel} = \vec{v}_{3,rel} = r_3\frac{2\pi n_3}{60} = 0.3\frac{2\pi(100)}{60}$$
$$\Rightarrow \vec{v}_{3,rel} = \vec{v}_{4,rel} = 3.142\ m/s\ \#$$

แทนค่าที่ทราบใน (1) จะได้

$$T_S = \frac{1}{2} m_t \bar{\vec{v}}^{\,2} + \Sigma \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{\rho}}_i\right|^2$$

จาก

$$T_S = \frac{1}{2} m_t \bar{\vec{v}}^{\,2} + \frac{1}{2} m_b \left\{\left|\vec{v}_{1,rel}\right|^2 + \left|\vec{v}_{2,rel}\right|^2 + \left|\vec{v}_{3,rel}\right|^2 + \left|\vec{v}_{4,rel}\right|^2\right\}$$

$$T_S = \frac{1}{2}\left(16 + 4(1.6)\right)(1.2)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}1.6\left\{\cancel{2}\left(3.77^2\right) + \cancel{2}\left(3.142^2\right)\right\}$$

$$\therefore T_S = 16.128\,J + 38.536\,J = 54.66\,J\ \underline{\underline{Ans}}$$

b) โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบ:$\vec{G}_S$

จากสมการ (4.9) $\vec{G}_S = m_t\,\bar{\vec{v}}$

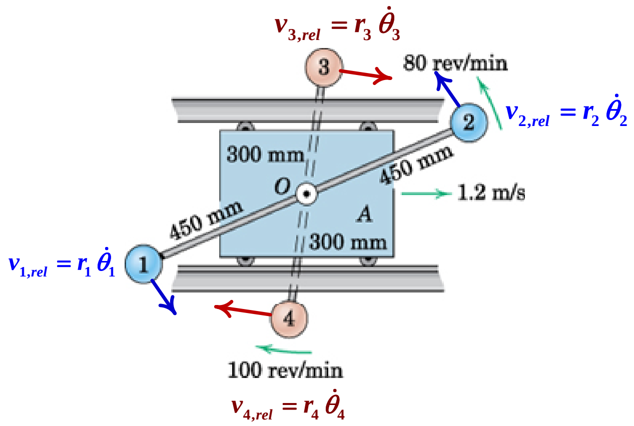
แทนค่า จะได้

$$\vec{G}_S = \left[16 + 4(1.6)\ kg\right]\left(1.2\vec{i}\ \ m/s\right)$$

$$\therefore \vec{G}_S = 26.88\ \vec{i}\ kg\cdot m/s\ (N\cdot s)\ \underline{\underline{Ans}}$$

c) โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบรอบจุด O : $\vec{H}_{O,S}$

จากสมการ (4.12a) $\vec{H}_{G,S} = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right)$



แทนค่าคำนวณ: $\vec{H}_{O,S} = \vec{H}_{G,S}$

$$\vec{H}_{G,S} = \Sigma\left(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right) = \Sigma\left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

$$\vec{H}_{G,S} = \left(r_1 \times m_1 v_1 + r_2 \times m_2 v_2\right)\vec{k} - \left(r_3 \times m_3 v_3 + r_4 \times m_4 v_4\right)\vec{k}$$

$$\vec{H}_{G,S} = 2\left(r_1 m_1 v_1\right)\vec{k} - 2\left(r_3 m_3 v_3\right)\vec{k}$$

$$\vec{H}_{G,S} = 2\left[0.45(1.6)(3.77)\right]\vec{k} - 2\left[0.3(1.6)(3.142)\right]\vec{k}$$

$$\vec{H}_{G,S} = 5.429\,\vec{k} - 3.016\,\vec{k}$$

$$\therefore\ \vec{H}_{O,S} = \left(2.412\,kg\cdot m^2/s\right)\vec{k}$$

$$= \left[2.412\,kg\cdot m^2/s\ \ (N\cdot m\cdot s)\right]\ CCW.\ \ \underline{\underline{Ans}}$$

แบบฝึกหัดท้ายบท

รายวิชา

พลศาสตร์วิศวกรรม

[ENGINEERING DYNAMICS]

<u>บทที่ 4</u> Kinetics of System of Particles

โดย

วิทูรย์ เห็มสุวรรณ

ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:...............**ชื่อ:**... **รหัส:**............................

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4: Kinetics of System of Particles

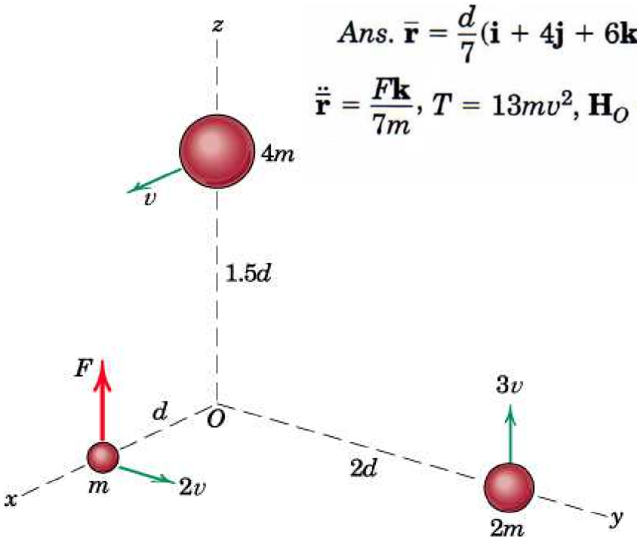
ข้อที่ 1 ([1] Problems 4/1)

4/1 The system of three particles has the indicated particle masses, velocities, and external forces. Determine $\bar{\mathbf{r}}$, $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$, $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$, T, $\mathbf{H}_O$, and $\dot{\mathbf{H}}_O$ for this system.

Ans. $\bar{\mathbf{r}} = \frac{d}{7}(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$, $\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{v}{7}(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$

$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{F\mathbf{k}}{7m}$, $T = 13mv^2$, $\mathbf{H}_O = mvd(12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$\dot{\mathbf{H}}_O = -Fd\mathbf{j}$

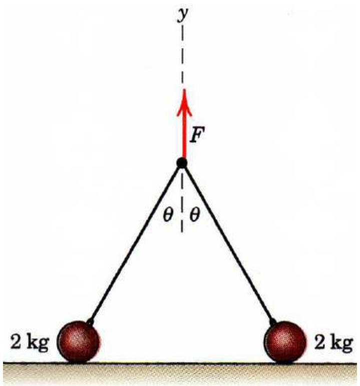


ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:..............**ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

<u>ข้อที่ 2</u> ([1] Problems 4/3)

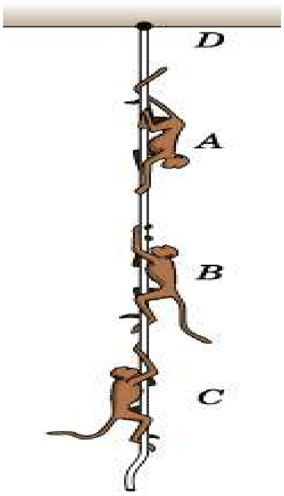
4/3 The two 2-kg balls are initially at rest on the horizontal surface when a vertical force $F = 60$ N is applied to the junction of the attached wires as shown. Compute the vertical component a_y of the initial acceleration of each ball by considering the system as a whole.

Ans. $a_y = 5.19 \text{ m/s}^2$



<u>ข้อที่ 3</u> ([1] Problems 4/4)

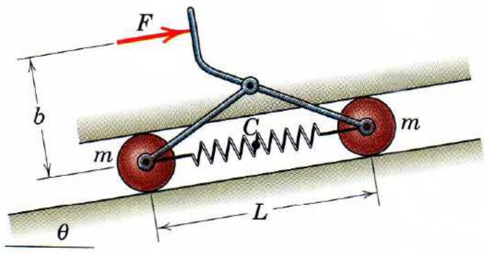
4/4 Three monkeys A, B, and C with masses of 10, 15, and 8 kg, respectively, are climbing up and down the rope suspended from D. At the instant represented, A is descending the rope with an acceleration of 2 m/s^2, and C is pulling himself up with an acceleration of 1.5 m/s^2. Monkey B is climbing up with a constant speed of 0.8 m/s. Treat the rope and monkeys as a complete system and calculate the tension T in the rope at D.



ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:..............**ชื่อ:**.. **รหัส:**...........................

<u>**ข้อที่** </u>4 ([1] Problems 4/6)

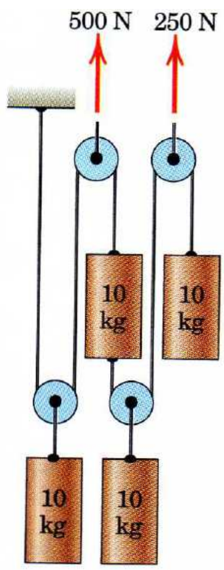
4/6 The two spheres, each of mass m, are connected by the spring and hinged bars of negligible mass. The spheres are free to slide in the smooth guides up the incline θ. Determine the acceleration a_C of the center C of the spring.



<u>**ข้อที่** 5</u> ([1] Problems 4/7)

4/7 Calculate the acceleration of the center of mass of the system of the four 10-kg cylinders. Neglect friction and the mass of the pulleys and cables.

Ans. $\bar{a} = 15.19\ \text{m/s}^2$

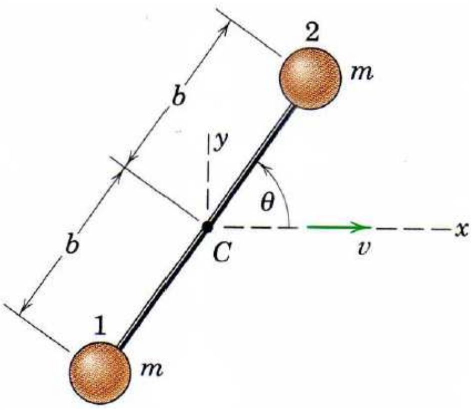


ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:............... **ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

<u>ข้อที่ 6</u> ([1] Problems 4/11)

4/11 The two small spheres, each of mass m, are rigidly connected by a rod of negligible mass. The center C of the rod has a velocity v in the x-direction, and the rod is rotating counterclockwise at the constant rate $\dot{\theta}$. For a given value of θ, write the expressions for (a) the linear momentum of each sphere and (b) the linear momentum $\mathbf{G}$ of the system of the two spheres.

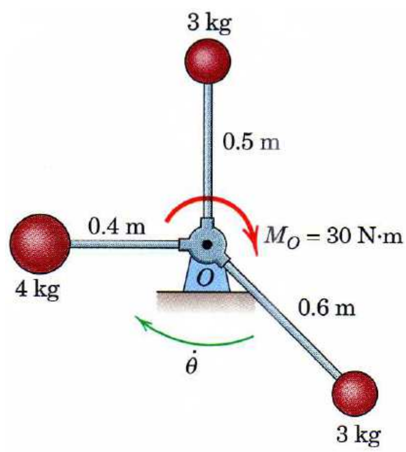
Ans. (a) $\mathbf{G}_1 = m[(v + b\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{i} - (b\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}]$
$\mathbf{G}_2 = m[(v - b\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{i} + (b\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}]$
(b) $\mathbf{G} = 2mv\mathbf{i}$



<u>ข้อที่ 7</u> ([1] Problems 4/15)

4/15 The three small spheres are welded to the light rigid frame which is rotating in a horizontal plane about a vertical axis through O with an angular velocity $\dot{\theta} = 20$ rad/s. If a couple $M_O = 30$ N·m is applied to the frame for 5 seconds, compute the new angular velocity $\dot{\theta}'$.

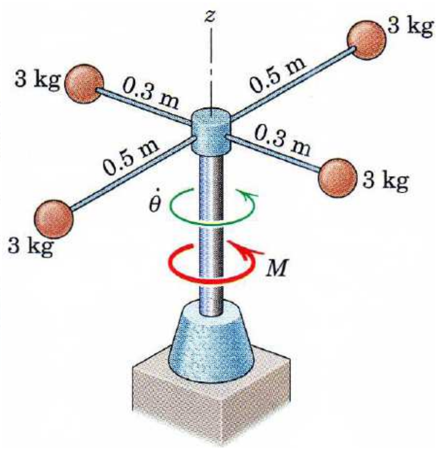
Ans. $\dot{\theta}' = 80.7$ rad/s



ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:..............**ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

<u>ข้อที่ 8</u> ([1] Problems 4/16)

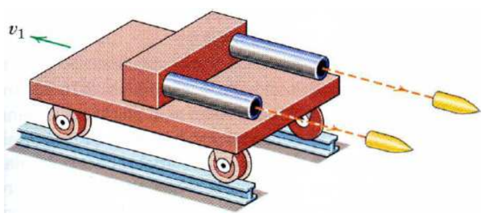
4/16 The four 3-kg balls are rigidly mounted to the rotating frame and shaft, which are initially rotating freely about the vertical z-axis at the angular rate of 20 rad/s clockwise when viewed from above. If a constant torque $M = 30\ \text{N}\cdot\text{m}$ is applied to the shaft, calculate the time t to reverse the direction of rotation and reach an angular velocity $\dot{\theta} = 20$ rad/s in the same sense as M.



<u>ข้อที่ 9</u> ([1] Problems 4/17)

4/17 Two projectiles, each with a mass of 10 kg, are fired simultaneously from the 1-Mg vehicle shown, which is moving with an initial velocity $v_1 = 1.2$ m/s in the direction opposite to the firing. Each projectile has a muzzle velocity $v_r = 1200$ m/s relative to the barrel. Calculate the velocity v_2 of the vehicle after the projectiles have been fired.

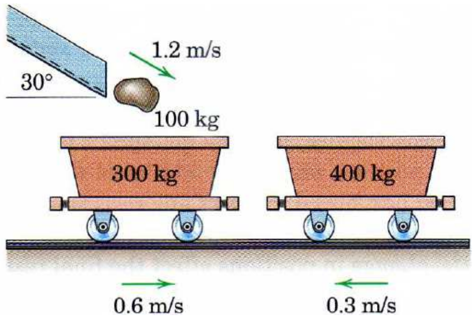
Ans. $v_2 = 24.7$ m/s



ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:............... **ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

<u>ข้อที่ 10</u> ([1] Problems 4/18)

4/18 The 300-kg and 400-kg mine cars are rolling in opposite directions along the horizontal track with the respective speeds of 0.6 m/s and 0.3 m/s. Upon impact the cars become coupled together. Just prior to impact, a 100-kg boulder leaves the delivery chute with a velocity of 1.2 m/s in the direction shown and lands in the 300-kg car. Calculate the velocity v of the system after the boulder has come to rest relative to the car. Would the final velocity be the same if the cars were coupled before the boulder dropped?

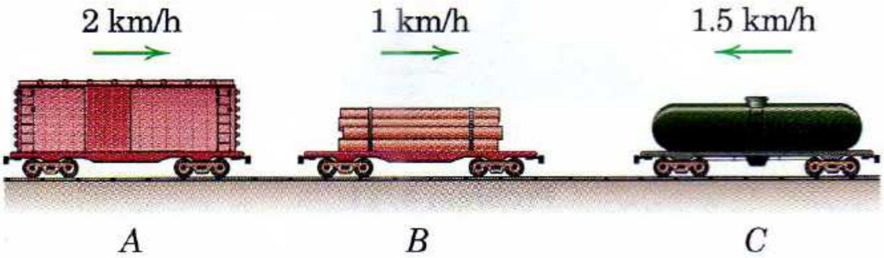


ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:...............**ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

<u>ข้อที่ 11</u> ([1] Problems 4/17)

4/19 The three freight cars are rolling along the horizontal track with the velocities shown. After the impacts occur, the three cars become coupled together and move with a common velocity v. The loaded cars A, B, and C have masses of 65 Mg, 50 Mg, and 75 Mg, respectively. Determine v and calculate the percentage loss n of energy of the system due to coupling.

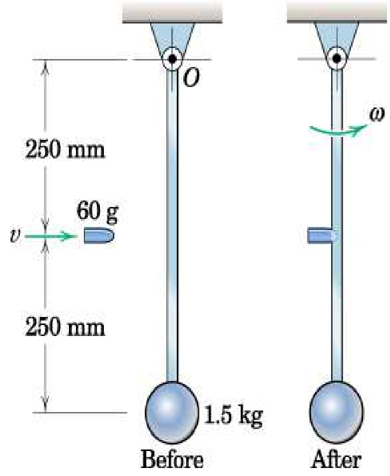
Ans. $v = 0.355$ km/h, $n = 95.0\%$



ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:...............**ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

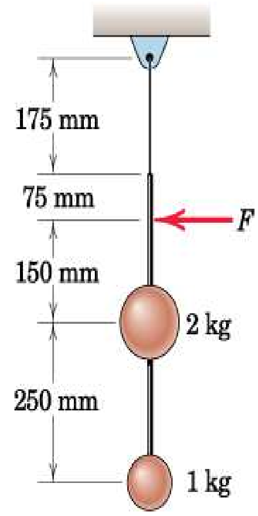
ข้อที่ 12 ([1] Problems 4/94)

4/94 A 60-g bullet is fired horizontally with a velocity v = 300 m/s into the slender bar of a 1.5-kg pendulum initially at rest. If the bullet embeds itself in the bar, compute the resulting angular velocity of the pendulum immediately after the impact. Treat the sphere as a particle and neglect the mass of the rod. Why is the linear momentum of the system not conserved?



ลำดับที่...../........ที่นั่ง Zone:...............**ชื่อ:**.. **รหัส:**............................

ข้อที่ 13 ([1] Problems 4/97)



4/97 The two balls are attached to the light rigid rod, which is suspended by a cord from the support above it. If the balls and rod, initial at rest, are struck with the force F = 60 N, calculate the corresponding acceleration $\bar{a}$ of the mass center and the rate $\ddot{\theta}$ at which the angular velocity of bar is changing.

Ans. $\bar{a} = 20\, m/s^2,\ \ \ddot{\theta} = 336\, rad/s^2$

ตำราอ้างอิง

[1] Meriam J. L., and Kraige L. G. *"Engineering Mechanics: Dynamics,"* 6th Ed., John Wiley and Sons, Inc, 2007